El Problema de la Galería de Arte

Gonzalo Mena Mendoza
Estudiante de Posgrado, Facultad de Informática
Universidad Autónoma de Querétaro
Querétaro, México
mena@computer.org

RESUMEN

Se describe el problema de encontrar el número de guardias necesarios para vigilar un polígono simple. Se presenta el problema original, los resultados actuales sobre la familia de problemas relacionados, sus variantes, los problemas abiertos y sus posibles aplicaciones.

PALABRAS CLAVE
visibilidad, combinatoria, diagonal, triangulación, guardia

INTRODUCCIÓN

Este problema de geometría computacional, engañosamente sencillo, fue propuesto inicialmente en 1973 por el geómetro y topólogo Victor Klee [1].

Supóngase que teniendo el plano de la planta de una galería de arte se desea saber cuántos guardias se necesitan colocar para que todo punto de la galería esté continuamente vigilado. De manera equivalente pueden imaginarse lámparas en lugar de guardias y requerir iluminación directa completa. El problema puede definirse formalmente como:

> Dado un polígono simple de n lados, determinar el mínimo número de vértices desde los que es posible ver todos los puntos en el interior del polígono [2].

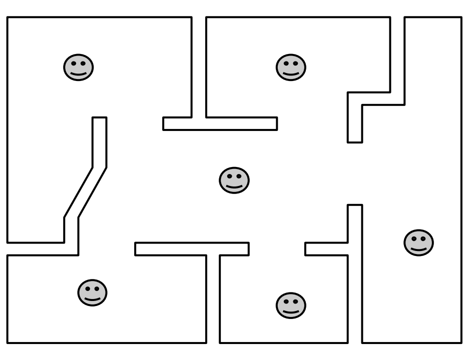

Figura 1: Guardias en una Galería de Arte

GLOSARIO

La definición de los siguientes términos es de utilidad para entender las descripciones subsiguientes [3].

$\lfloor x \rfloor$
: Función que regresa el mayor entero que es menor o igual a x.

$\lceil x \rceil$
: Función que regresa el menor entero que es mayor o igual a x.

Diagonal
: Segmento dentro de un polígono tal que sus extremos son vértices, y que de otra manera no toca ∂P, el perímetro de P.

Guardia
: Un punto, fuente de visibilidad o iluminación.

Guardia de vértice
: Aquel que se encuentra en el vértice de un polígono.

Guardia de punto
: Aquel que se encuentra en un punto arbitrario.

Linterna
: Una fuente de luz que ilumina desde el ápice de un cono con apertura α.

Linterna de vértice
: Aquella cuyo ápice está en un vértice (a lo más una por vértice).

Polígono simple
: Aquel que no se intersecta a sí mismo.

Visibilidad
: Propiedad entre dos puntos cuando existe un segmento de línea que los conecta sin cruzar obstaculo alguno.

Visibilidad interior
: En una región poligonal P, un guardia $x \in P$ puede ver un punto $y \in P$ si el segmento xy no es exterior a P: $xy \subset P$.

Visibilidad exterior
: En una región poligonal P, un guardia $x \in P$ puede ver un punto $y \notin P$ si el segmento xy no es interior a P: xy puede intersectar ∂P, el perímetro de P.

http://mena.com.mx/gonzalo/maestria/invest/Problema_Galeria_de_Arte.pdf

TEOREMA DE LA GALERÍA DE ARTE

Conjetura: para un polígono simple con n lados, $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias son a veces necesarios y siempre suficientes para vigilar el polígono. Dichos guardias pueden siempre colocarse en los vértices del polígono.

Vasek Chvátal hizo la primera demostración de esta conjetura, ahora llamada el Teorema de la Galería de Arte. Esta demostración era rudimentaria, posteriormente Steve Fisk encontró una prueba “para El Libro”[*].

La demostración se realiza en pocos pasos [2]:

1. Triangular el polígono con sus diagonales.
2. Mostrar que para dicha triangulación, sus vértices pueden colorearse con sólo tres colores, de modo que cada triángulo tenga todos los colores.
3. Escoger los vértices del polígono con el color menos frecuente.

Puede probarse formalmente que es posbile utilizar sólo tres colores para colorear los vértices de la triangulación de un polígono simple [4]. Supóngase entonces que se encontró una triangulación diagonal que cumpla 1. y 2. Asúmase que R son los vértices rojos; V, los verdes y A, los azules. Entonces obviamente $R + V + A = n$. Uno de los números forzosamente no excede a los otros dos, por lo que sin perder generalidad podemos asumir que:

$$A \leq R \quad \text{y} \quad A \leq V$$

Entonces:

$$3A \leq R + V + A = n$$

Para lo que $A \leq n/3$, y como A es un número entero:

$$A \leq \lfloor n/3 \rfloor$$

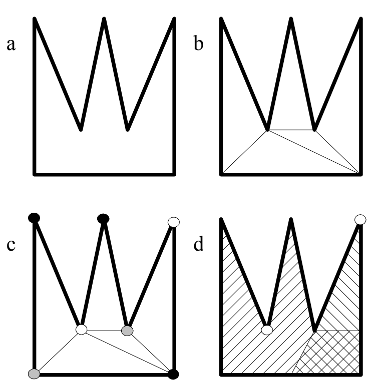

Figura 2: Posición de los guardias necesarios

* Paul Erdős decía que Dios tiene un libro con los teoremas más elegantes y sus demostraciones [1].

La figura2 muestra los pasos para resolver un polígono con n = 7 (2a), el cual debe necesitar 2 guardias como máximo. El polígono es triangulado (2b) y se colorean los vértices de cada tríangulo (2c), lo que arroja tres vértices negros, dos grises y dos blancos. Se elijen estos últimos y se muestra el área vigilada por cada uno (2d).

PRINCIPALES RESULTADOS

La tabla 1 muestra los resultados encontrados a la fecha para los problemas más generales [4]. Algunas variantes tienen nombre mnemónicos en relación al tipo de polígono, al tipo de guardia y a la posición del mismo respecto del área vigilada.

En todos los casos el número de guardias mostrado es el necesario para algunos polígonos y suficiente para todos los polígonos.

Problema	**Polígono**	**Posición**	**Guardia**	**Número**
Galería de Arte	simple	interior	vértice	$\lfloor n/3 \rfloor$
Fortaleza	simple	exterior	punto	$\lceil n/3 \rceil$
Patio de Prisión	simple	int. y ext.	vértice	$\lceil n/2 \rceil$
Patio de Prisión	ortogonal	int. y ext.	vértice	$[\lceil 5n/16 \rceil, \lfloor 5n/12 \rfloor + 2\,]$
Polígonos ortogonales	ortogonal simple	interior	vértice	$\lfloor n/4 \rfloor$
Polígono ortogonal con agujeros	ortogonal con h agujeros	interior	vértice	$\lfloor n/4 \rfloor$
Polígonos con agujeros	polígonos con h agujeros	interior	punto	$\lfloor (n+h)/3 \rfloor$

Tabla 1: Número de guardias necesarios

La figura 3 muestra el patio de prisión ortogonal, con n=24, cuyo interior y exterior son vigilados por 8 guardias.

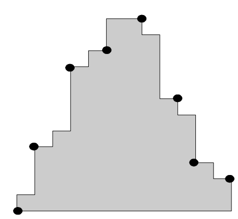

Figura 3: Prisión ortogonal

OTRAS VARIACIONES

GUARDIAS MÓVILES

Esta variación permite que los guardias patrullen segmentos, diagonales o lados del polígono; lo cual es equivalente a iluminar con lámparas fluorescentes alineadas con segmentos, diagonales o lados [4,5].

ILUMINACIÓN CON LINTERNAS

Urrutia introdujo una clase de preguntas que involucran guardias con visión restringida, o dicho de otra manera, iluminación con linternas de mano. ¿Cuántas linternas, cada una con apertura α y con su ápice en puntos distintos no exteriores, son suficientes para cubrir un polígono de n vértices? [4]

GUARDIAS VIGILADOS

En esta variante puede verse como el problema de guardias en los que no se confía plenamente y se desea que cada guardia se visible por otro [6].

PROBLEMAS ABIERTOS

- Algoritmos de triangulación, idealmente en tiempo lineal [3].
- Algoritmos para encontrar soluciones óptimas.
- Problemas con polígonos ortogonales.

CONCLUSIÓN

Se mostró como un problema que parece tan sencillo a primera vista da lugar a una familia de problemas interesantes y a variaciones que pueden ser investigadas.

Las posibles aplicaciones de este tema incluyen la vigilancia con cámaras de seguridad fijas o con robots ambulantes, la iluminación óptima de espacios, "rendering" de imágenes, posicionamiento de antenas para aplicaciones inalámbricas, etc.

REFERENCIAS

[1] Joseph Malkevitch, "Diagonals: Part I", *American Mathematical Society*, http://www.ams.org/ featurecolumn/ archive/diagonals1.html, febrero de 2004, consultado junio de 2005.

[2] Alexander Bogomolny, "Chvatal's Art Gallery Theorem", *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*, http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/ Combinatorics/Chvatal.shtml, consultado junio de 2005.

[3] M. De Berg, M. van Kreveld et al, "Polygon Triangulation: Guarding an Art Gallery, Chapter 3", *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, (Springer-Verlag, segunda edición, Berlin, 2000), 45-61.

[4] Jacob E. Goodman, Joseph O'Rourke, "Visibility, Chapter 28", *Handbook of Discrete and Computational Geometry* (CRC Press LLC, segunda edición, abril 2004), 643-645.

[5] Eric Johnson, "A Survey of Mobile Guards in Art Galleries", http://eric.gruver.net/ArtGalleryProblems.html

[6] Joseph Malkevitch, "Diagonals: Part II", *American Mathematical Society*, http://www.ams.org/ featurecolumn/archive/gallery1.html, marzo de 2004, consultado junio de 2005.